CONCOURS SPECIAL DE RECRUTEMENT AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES

1984

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

PRÉAMBULE

Dans ce problème $\mathcal{V}$ désigne un espace vectoriel de dimension deux sur le corps $\mathbb{R}$ des réels; a et b sont deux réels fixés.

Si la fonction numérique Z des deux réelles variables x et y est munie quand (x, y) décrit $\mathbb{R}^2$ de dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre deux, on dira que « la fonction Z est solution de (1) » si pour tous x, y de $\mathbb{R}^2$ on a

$$a\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x, y) + b\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x, y) = 0. \tag{1}$$

Si Z est solution de (1) on appellera « surface Σ » l'ensemble des points de coordonnées $\{x, y, Z(x, y)\}$ dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension trois sur $\mathbb{R}$, muni d'une structure euclidienne et d'un repère orthonormé $\mathcal{R} : (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

PREMIÈRE PARTIE

On suppose $\mathcal{V}$ rapporté à une base $\mathcal{B} = \{E, U\}$. Le vecteur nul de $\mathcal{V}$ sera noté 0. Les composantes sur $\mathcal{B}$ d'un élément z de $\mathcal{V}$ seront appelées x et y (celles de z' : x' et y').

On veut définir sur $\mathcal{V}$, outre les deux lois usuelles de composition pour un espace vectoriel, une multiplication interne notée : $(z, z') \longmapsto z \times z'$.

Cette multiplication doit vérifier les conditions suivantes :

a. E est élément neutre.

b. Pour tout z de $\mathcal{V}$ les deux applications notées d_z et g_z définies par :

$$\forall z' \in \mathcal{V} \qquad d_z(z') = z \times z' \qquad \text{et} \qquad g_z(z') = z' \times z$$

sont linéaires.

c. En notant z^2 le carré d'un élément z de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire $z \times z$, $U^2 = aE + bU$.

1° Montrer que l'ensemble des conditions ci-dessus permet de définir une multiplication interne.

Quelle est la structure ainsi définie pour $\mathcal{V}$?

2° Montrer que z élément non nul de $\mathcal{V}$ est inversible pour la multiplication interne si et seulement si l'application d_z définie en b est surjective. Caractériser les diviseurs de 0.

A quelle condition portant sur a et b, $\mathcal{V}$ est-il un corps ?

3° Montrer qu'il est toujours possible de déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{V}$ de la forme $\{E, I\}$ et un réel k tels que $I^2 = kE$.

Est-ce possible de façon unique ?

.../...

Dans toute la suite du problème on choisira pour vecteur I de $\mathcal{B}'$ un vecteur tel que sa composante sur U dans la base $\mathcal{B}$ soit égale à 1. Les composantes de z (vecteur de $\mathcal{V}$) dans $\mathcal{B}'$ pourront être notées (ξ, η).

4° Quand a et b sont tels que k soit un réel strictement positif on pourra poser $k = c^2$ où c est réel strictement positif.

Montrer que dans ces conditions il est possible de déterminer une autre base $\mathcal{B}''$ notée $\{E_1, E_2\}$ telle que : $E_1 \times E_2 = O$; $E_1^2 = E_1$; $E_2^2 = E_2$.

En appelant (x_1, x_2) les composantes d'un élément z de $\mathcal{V}$ dans cette base $\mathcal{B}''$, (x_1', x_2') celles de z', exprimer $z \times z'$ en utilisant $\mathcal{B}''$. En déduire pour z donné de $\mathcal{V}$ l'expression dans $\mathcal{B}''$ de z^n où n est un entier donné strictement positif. En revenant à la base $\mathcal{B}$, quelles sont les composantes dans $\mathcal{B}$ de z^n si z a pour composantes (x, y)?

Deuxième partie

Dans cette partie on suppose $a + \frac{b^2}{4} = 1$ et on utilise des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ définies à la première partie (pour un z donné de $\mathcal{V}$ on note (ξ, η) (respectivement (x_1, x_2)) ses composantes dans $\mathcal{B}'$ (resp. $\mathcal{B}''$)).

Soit f une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$. On posera selon le cas :

$$f(z) = P(\xi, \eta)\, E + Q(\xi, \eta)\, I \qquad \text{ou} \qquad f(z) = P_1(x_1, x_2)\, E_1 + P_2(x_1, x_2)\, E_2$$

où P, Q ; P_1, P_2 sont des fonctions numériques de 2 variables réelles.

Pour h élément de E noté $\alpha E + \beta I$ (resp. $h_1 E_1 + h_2 E_2$) on posera $\| h \| = \sup(|\alpha|, |\beta|)$ (resp. sup. $(|h_1|, |h_2|)$) ce qui signifie « la plus grande des valeurs absolues de α et de β » (resp. de h_1 et de h_2).

On sait que cela définit une norme dans $\mathcal{V}$ où toutes les normes sont équivalentes.

1° On utilise la base $\mathcal{B}'$.

On dira que f est « différentiable en z » s'il existe deux fonctions numériques A et B de deux variables réelles ξ et η, ainsi que deux fonctions numériques ε_1 et ε_2 de quatre variables réelles ξ, η, α, β telles que, en posant $\varepsilon = \varepsilon_1 E + \varepsilon_2 I$ $\lim_{\|h\| \to 0} \| \varepsilon \| = 0$ et vérifiant :

pour $\| h \|$ suffisamment petit

$$f(z + h) - f(z) = (A(\xi, \eta)\, E + B(\xi, \eta)\, I) \times h + \| h \| (\varepsilon_1 E + \varepsilon_2 I)$$

Montrer que dans ces conditions les fonctions P et Q définies ci-dessus admettent en (ξ, η) des dérivées partielles et que ces dérivées partielles vérifient deux relations (r_1) et (r_2).

Sous des hypothèses supplémentaires suffisantes qu'on énoncera, montrer qu'il existe une fonction numérique W des deux variables ξ et η telle que $dW = P(\xi, \eta)\, d\xi + Q(\xi, \eta)\, d\eta$ et dont les dérivées secondes vérifient $\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}$.

2° Reprendre la même étude en utilisant la base $\mathcal{B}''$ et les notations définies au début de cette partie.

Pour f différentiable en z on écrira :

$$f(z + h) - f(z) = (M(x_1, x_2)\, E_1 + N(x_1, x_2)\, E_2) \times h + \| h \| (\varepsilon_1' E_1 + \varepsilon_2' E_2).$$

Que peut-on dire des fonctions P_1 et P_2 de (x_1, x_2) ?

.../...

Troisième partie

On se propose de trouver les fonctions T de deux variables réelles X et Y, à valeurs réelles, munies pour tout (X, Y) de dérivées partielles secondes continues et qui vérifient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0 \text{ pour tout élément } (X, Y). \tag{2}$$

1° On donne un réel p non nul.

Chercher s'il existe une solution de (2) qui soit de la forme : $T(X, Y) = (\sin \lambda X).\ \varphi(Y)$ où φ est une fonction numérique d'une variable réelle, à dérivée seconde continue et telle que $\varphi(0) = \varphi(p) = 0$, λ étant une constante réelle à déterminer.

Former une équation différentielle que doit vérifier φ. En déduire des solutions particulières de (2).

2° La deuxième partie suggère un changement de variables. L'utiliser pour trouver toutes les solutions de (2).

Quatrième partie

On suppose les deux réels a et b tels que : $a + \frac{b^2}{4} > 0$.

On reprend l'écriture des vecteurs de $\mathcal{V}$ dans la base initiale $\mathcal{B} = \{E, U\}$. Pour $z = xE + yU$ et f application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ on posera $f(z) = R(x, y)E + S(x, y)U$, où R et S sont deux fonctions numériques de deux variables réelles. On adaptera à la base $\mathcal{B}$ la définition donnée dans la deuxième partie d'une « application f différentiable en z ».

1° Supposant f différentiable en tout z de $\mathcal{V}$, montrer que R et S admettent en tout (x, y) des dérivées partielles premières qui vérifient deux relations (r'_1) et (r'_2) où interviennent a et b.

2° Montrer que sous des hypothèses suffisantes (à formuler) les deux fonctions R et S vérifient l'équation (1) du préambule.

Les parties précédentes suggèrent un changement de variables.

Transformer l'équation (1) par ce changement de variables et en déduire la solution générale de l'équation (1). (On pourra utiliser la base $\mathcal{B}''$.)

3° Montrer qu'il existe un et un seul couple de réels (a, b) vérifiant

$$a + \frac{b^2}{4} > 0 \quad \text{tel que} \quad R(x, y) = e^{x + \frac{y}{2}} \operatorname{Ch} y \quad \text{et} \quad S(x, y) = e^{x + \frac{y}{2}} \operatorname{Sh} y$$

vérifient (1). Alors à tout z de $\mathcal{V}$ on associe $f(z) = R(x, y)E + S(x, y)U = z'$ et dans un plan affine rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la correspondance qui au point M de coordonnées x et y associe le point $M' = F(M)$ de coordonnées $x' = R(x, y)$ et $y' = S(x, y)$ où R et S ont les valeurs ci-dessus.

Montrer que le point M' ne peut décrire une droite de ce plan que si M décrit une droite de l'une ou l'autre de deux familles de droites et que cela peut se produire si z est diviseur de zéro pour la multiplication interne dans $\mathcal{V}$. Donner dans chaque cas une équation cartésienne dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la droite décrite par M et de la droite décrite par M'

Cinquième partie

Dans cette partie on suppose que $a = -\frac{b^2}{4}$, avec $b \neq 0$.

1° On donne un réel non nul m. Peut-on trouver une fonction numérique ψ d'une variable réelle telle que la fonction des deux variables x et y définie par $Z(x, y) = e^{-mz}\psi(y)$ soit solution de (1) ? (e est la base des logarithmes népériens.) Indiquer toutes les fonctions ψ possibles.

2° On prend dans cette question $b = -2$ et on choisit dans $\mathcal{V}$ une nouvelle base $\mathcal{B}'' = \{E', I'\}$ avec $E' = -E$ et $I' = E + U$.

(On pourra appeler x' et y' les composantes d'un z de $\mathcal{V}$ dans cette nouvelle base.)

a. Transformer (1) en utilisant la base $\mathcal{B}''$.

En déduire les solutions de (1).

b. Soit Σ la surface associée à l'une quelconque des solutions de (1) comme cela a été indiqué dans le préambule.

Montrer qu'on peut considérer Σ comme l'ensemble des points des droites D_λ d'une famille de droites de $\mathcal{A}$ où λ décrit $\mathbb{R}$.

Que peut-on dire de la direction des droites D_λ ?

c. On donne quatre réels α_1, α_2, β_1, β_2 tels que $\alpha_1 < \alpha_2$ et $\beta_1 < \beta_2$.

Indiquer une méthode de calcul de l'intégrale double $\mathcal{I} = \iint_{(\mathcal{Q})} Z(x, y)\, dx\, dy$ où Z est une solution de (1) et $\mathcal{Q}$ défini par :

(*r*) $\qquad \alpha_1 \leqslant x - y \leqslant \alpha_2 \qquad$ et $\qquad \beta_1 \leqslant y \leqslant \beta_2$.

Donner une interprétation de $\mathcal{I}$ quand on suppose que pour tout (x, y) tel que (*r*) soit vérifié, $Z(x, y)$ est positif ou nul.

Sixième partie

Dans cette partie on prend $a = -\frac{5}{4}$ et $b = 1$.

Chercher les solutions de (1) qui sont des polynômes en (x, y) du second degré.

On associe à une de ces solutions la surface Σ comme cela a été indiqué dans le préambule.

Peut-on déterminer la fonction $(x, y) \longrightarrow Z(x, y)$ solution de (1) polynôme de degré deux telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

a. Le plan affine de $\mathcal{A}$ d'équation cartésienne $x = 0$ dans le repère $\mathcal{R}$ a pour intersection avec Σ une droite affine.

b. Le plan affine de $\mathcal{A}$ d'équation $y = 0$ a pour intersection avec Σ la parabole de sommet et de foyer ayant respectivement pour triplets de coordonnées $(1, 0, 0)$ et $\left(1, 0, \frac{1}{4}\right)$.

c. Le plan affine de $\mathcal{A}$ d'équation $Z = 0$ a pour intersection avec Σ l'ensemble des points de deux droites affines.

Combien y a-t-il de solutions ?

Montrer qu'alors il existe deux directions de plans qui ont pour intersection avec Σ une droite affine.

En déduire l'intersection de Σ avec l'un quelconque de ses plans tangents.